

Análise de Erros e Formação de Professores:

Sugestões para Ensino e Pesquisa
em Cursos de Licenciatura em Matemática

Helena Noronha Cury

Resumo

Neste artigo a análise de erros é apresentada como metodologia de pesquisa e ensino para cursos de formação de professores de Matemática. A partir dos dados obtidos em um projeto de pesquisa desenvolvido com calouros de cursos de Ciências Exatas, são abordadas algumas conceituações teóricas sobre aprendizagem em Álgebra, para fundamentar a utilização dos erros cometidos pelos alunos. Os resultados da investigação também são empregados na proposta de atividades de pesquisa e ensino, especialmente relacionadas com conteúdos de Álgebra e sugeridas para cursos de Licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Análise de erros. Formação de professores. Atividades em Álgebra.

ERROR ANALYSIS AND TEACHERS FORMATION: suggestions for teaching and research in mathematics teacher education courses

Abstract

In this paper, error analysis is presented as methodology of research and teaching, to mathematics teacher education courses. From the data obtained in a research project developed with freshmen of Exact Sciences courses, some theoretical conceptualizations about algebraic learning are focused, to found the use of errors committed by students. The results of the inquiry are also used in the proposal of activities of research and teaching, especially related with contents of Algebra and suggested to mathematics teacher education courses.

Keywords: Error analysis. Mathematics teacher education. Activities in algebra.

Os cursos de formação inicial de professores de Matemática têm, entre suas várias responsabilidades, a de proporcionar aos futuros licenciados referenciais sobre os processos de avaliação nesta disciplina. Muitas vezes os erros são associados a esses procedimentos de avaliação, como se fosse possível e necessário apenas pontuar as produções dos estudantes pelos acertos e erros cometidos. Sabemos que não é fácil avaliar o desempenho dos alunos, especialmente se levarmos em conta que, quaisquer que sejam os instrumentos empregados, eles são incompletos e nunca podem abarcar toda a “verdade” sobre a aprendizagem.

Além disso, os componentes emocionais – o medo de receber uma nota baixa, que pode levar o aluno, em casa, a ser castigado; a baixa auto-estima, se os maus resultados se mantêm em muitas ocasiões; os pré-julgamentos em relação à Matemática, se os pais ou irmãos já tiveram dificuldades nessa disciplina – levam o estudante a evitar falar sobre suas dificuldades e o professor a querer se livrar da “crucificação” representada pelo fato de não ter conseguido “transmitir” os conhecimentos.

Evidentemente, a avaliação não deve se restringir a pontuar acertos e erros, mas a análise das produções dos alunos é um dos procedimentos que adotamos para avaliar seu desempenho. Mesmo sabendo que discutir erros não é tarefa fácil, nem por isso se deve evitar o assunto. Em um curso de formação de professores, é responsabilidade dos formadores quebrar essa cadeia de mal-entendidos, proporcionando aos futuros docentes de Matemática a oportunidade de perceberem seus próprios erros, para, a partir de uma reflexão sobre eles, retomarem os conteúdos nos quais apresentam dificuldades que, se não superadas, somente servirão para alimentar novas ocorrências de erros por parte de seus futuros alunos.

A análise de erros em Matemática tem se constituído em uma abordagem de pesquisa, apresentada sob diferentes enfoques desde o início do século passado, seguindo as tendências pedagógicas e as correntes da Psicologia Educacional vigentes nas diferentes épocas. Atualmente, diante das novas orientações educacionais brasileiras que têm privilegiado os exames oficiais,

como o do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), o do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e o Exame Nacional de Desempenho (Enade), novamente os olhares se voltam para os erros cometidos pelos alunos nessas provas, para entender as dificuldades de aprendizagem de Matemática em qualquer nível de ensino.

O projeto “Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores”, que recebeu apoio do CNPq e foi desenvolvido em conjunto por docentes de oito Instituições de Ensino Superior gaúchas, foi uma experiência que trouxe informações atualizadas sobre conhecimentos e habilidades de alunos ingressantes em cursos superiores, tendo, portanto, recém concluído o Ensino Médio e trazendo, deste nível e do anterior, muitas dificuldades não solucionadas.

O projeto foi desenvolvido com os seguintes objetivos: a) analisar e classificar erros cometidos por alunos ingressantes em disciplinas matemáticas de cursos superiores; b) elaborar e desenvolver atividades de sala de aula para explorar as dificuldades detectadas; c) avaliar os resultados da experiência e a possibilidade de reaplicação em diferentes Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul e do país. A amostra intencional foi formada por 368 alunos de 12 turmas de cursos da área de Ciências Exatas das Instituições envolvidas, aos quais foi aplicado um teste de múltipla escolha. Além de assinalar a alternativa considerada correta, o aluno devia desenvolver a questão, de forma que pudéssemos, na segunda fase, analisar qualitativamente suas produções.

A partir de pesquisas sobre erros por nós empreendidas, desenvolvemos uma metodologia de análise qualitativa dos erros (Cury, 2003) que empregamos nesse projeto, seguindo, em linhas gerais, os passos da análise de conteúdo, apresentadas em Bardin (1979) e Patton (1986). Neste artigo discutiremos sobre os resultados da análise de algumas questões do teste e, a partir dos dados obtidos e da fundamentação teórica relativa aos constructos envolvidos, vamos discutir a possibilidade de utilizar a análise de erros como metodologia de pesquisa e ensino em cursos de formação de professores.

A Pesquisa e a Análise das Soluções dos Alunos

Entre as questões do teste aplicado aos alunos, algumas delas abordam, especificamente, conteúdos do Ensino Fundamental que são necessários para a solução de exercícios sobre esboço de gráficos de funções ou cálculo de limites e derivadas, em Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo. O Cálculo tem sido apontado como uma das disciplinas com mais alto nível de evasão ou repetência em cursos superiores e o estudo das dificuldades dos calouros nesses conteúdos pode auxiliar os professores do Ensino Fundamental ou Médio a rever seu ensino, uma vez que as origens das dificuldades parecem se localizar nesses níveis.

Escolhemos assim, para exemplificar os dados obtidos na pesquisa, três questões, denominadas de A, B e C, cujos enunciados são apresentados a seguir:

Questão A: Se $x \neq 2$ e $x \neq 0$ então a expressão $\frac{x^3 + x^2 - 6x}{8x^2 - 16x}$ pode ser escrita como:

- a) $x + 3$ b) $\frac{x+3}{8}$ c) $8x$ d) $\frac{4}{x+3}$ e) 16 .

Questão B: O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R\$ 41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de R\$ 28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é:

- a) 5.000 b) 13.000 c) 18.000 d) 23.000 e) 41.000

Questão C: O conjunto-solução, em \mathcal{R} , da equação $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{2x+9} = \frac{2}{2x^2 + 19x + 45}$ é

- a) $\{-4, -5\}$ b) $\{-5\}$ c) $\{-4\}$ d) $\{4\}$ e) $\{5\}$

Em um primeiro momento, parece que essas questões, relacionadas a conteúdos de Ensino Fundamental, deveriam ter sido resolvidas corretamente pelos alunos da amostra, dado que são estudantes de primeiros semestres de cursos superiores, como Licenciatura em Matemática, Engenharia e Informática. A Tabela 1, a seguir, entretanto, revela que, em termos quantitativos, esses estudantes têm dificuldade de solucionar exercícios básicos.

Tabela 1: Distribuição do número de acertos e de respostas em branco das questões A, B e C do teste resolvido por 368 alunos de cursos superiores de Ciências Exatas

Questão	Nº de acertos	%	Nº de itens sem resposta	%
A	121	32,9	124	33,7
B	232	63,0	48	13,0
C	67	18,2	128	34,8

Fonte: Dados de pesquisa da autora

Se considerarmos apenas os dados quantitativos do teste, entre todas as 12 questões, a C foi a mais difícil e a B, a mais fácil, sendo a questão A de dificuldade média. Estes dados são relativos aos alunos de todos os cursos, mas podemos nos questionar se há diferença ao considerarmos apenas aqueles provenientes dos dois cursos de Licenciatura em Matemática envolvidos na pesquisa, o que mostramos na Tabela 2, a seguir:

Tabela 2: Distribuição percentual de acertos nas questões A, B e C, nos dois cursos de Licenciatura em Matemática

Questão	% de acertos no Curso 1	% de acertos no Curso 2
A	33	39
B	78	43
C	6	7

Fonte: Dados de pesquisa da autora

Vemos, então, que as dificuldades não se desfazem, inclusive até são maiores na questão C. Foi a segunda parte da pesquisa, porém, relativa à análise qualitativa, que nos forneceu condições de entender melhor as dificuldades detectadas, o que foi possível a partir do trabalho de unitarização, categorização e elaboração de texto-síntese sobre as respostas (Cury, 2003).

Em relação à questão A, por exemplo, notamos que as classes com maior representatividade são as que englobam as dificuldades na fatoração das expressões e nas operações com potências de x . (Cury, 2006). Na questão B, os alunos que erraram mostraram não saber traduzir os dados do problema para um sistema de equações; alguns, então, resolveram por tentativa. Um outro tipo de erro consistiu em obter o valor de um dos elementos (por exemplo, o valor do carro) e esquecer de substituir para encontrar o outro; dessa forma, foi assinalado apenas o valor encontrado em primeiro lugar e não a diferença, como era solicitado.

Na questão C, após uma primeira categorização, em que encontramos 19 tipos de erros, a classificação foi refinada e obtivemos sete classes. A de maior representatividade mostra que os alunos tendem a aplicar a fórmula de Bhaskara a qualquer expressão quadrática, sem entender a estrutura da equação original. Também notamos que os alunos não sabem adicionar frações algébricas, empregando uma espécie de “sobregeneralização” de regras aprendidas para adição nos conjuntos dos naturais ou dos inteiros. Assim, adicionam (ou multiplicam), separadamente, numeradores e denominadores, sem buscar um denominador comum para as frações (Cury; Konzen, 2005/2006)

Ao nos reportamos às resoluções dos alunos de Licenciatura em Matemática, não notamos diferenças qualitativas. Se estudantes que, em princípio, escolheram a Matemática porque querem ser professores dessa disciplina, evidenciam tais problemas para resolver questões da Educação Básica, como vamos esperar que, em seus cursos, possam se graduar com condições de entender as dificuldades de seus alunos e de ajudá-los a desenvolver habilidades matemáticas? Essa pergunta nos levou a aproveitar os dados sobre os erros cometidos pelos calouros da pesquisa e, nos cursos de Licenciatura em Mate-

mática das Instituições envolvidas no projeto aqui relatado, trabalhar sobre eles em aulas de Metodologia do Ensino de Matemática, para discutir com os futuros professores as dificuldades que são também deles, mas sobre as quais eles deverão se debruçar em suas futuras práticas.

Teorizações sobre a Educação Algébrica e suas Dificuldades

Para cada erro detectado em uma investigação, é possível buscar teóricos que estudaram as dificuldades dos alunos nos conteúdos envolvidos ou as habilidades necessárias para a resolução dos problemas propostos. Em relação à Álgebra, Hoch e Dreyfus (2004) consideram que uma estrutura algébrica pode ser definida em termos de forma ou ordem e, segundo eles, qualquer expressão ou sentença algébrica representa tal estrutura. Dessa forma,

O sentido da estrutura, como se aplica ao Ensino Médio, pode ser descrito como uma coleção de habilidades. Essas habilidades incluem: ver uma expressão ou sentença algébrica como uma entidade; reconhecer uma expressão ou sentença algébrica como uma estrutura previamente encontrada; dividir uma entidade em sub-estruturas, reconhecer conexões mútuas entre estruturas, reconhecer quais manipulações são possíveis de realizar e quais manipulações são úteis para realizar (Hoch; Dreyfus, 2004, p. 51).

Os autores avaliaram respostas de alunos do Ensino Médio, em Israel, relativas a equações em que algumas expressões envolvendo frações algébricas apareciam duas vezes em uma mesma equação, entre parênteses ou não, separadas por um sinal de menos. Os investigadores esperavam que os estudantes visualizassem essas expressões como um todo e se dessem conta de que, por serem iguais, a diferença deveria ser zero. O resultado, no entanto, foi, conforme suas palavras, “desapontador”, pois a maior parte dos alunos mostrou não usar o “sentido da estrutura”, tendo que resolver a equação a partir da obtenção do denominador comum às frações.

Linchevski e Livneh (1999) pesquisaram estudantes de Ensino Fundamental, em Israel e no Canadá, solicitando que resolvessem expressões numéricas para verificar se conheciam a ordem das operações. Depois de responder, os alunos eram desafiados, recebendo a informação de que outros colegas tinham usado outra ordem e perguntando se eles confirmavam sua resposta. Em outras questões da pesquisa, buscavam verificar as mudanças com o emprego de parênteses. Ao final, concluíram que os estudantes devem ser expostos à estrutura das expressões algébricas para desenvolver o “sentido da estrutura”, o que significa “ser capaz de usar flexivelmente e criativamente estruturas equivalentes de uma expressão” (p. 191).

Kirshner e Awtry (2004) realizaram uma pesquisa com estudantes norte-americanos, de Ensino Fundamental, para verificar como eles empregavam regras para transformações algébricas, ainda não estudadas em aula e apresentadas a eles durante o experimento. Na fundamentação teórica da investigação, os autores discutem erros causados pela “sobregeneralização” de regras, como considerar que o quadrado de uma soma é igual à soma dos quadrados das parcelas. Certas regras parecem ter uma “saliência visual”, caracterizada por eles como “sentido estético da forma”. Assim, aquelas igualdades que têm maior apelo visual, como a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, seriam mais facilmente compreendidas pelos alunos, enquanto outras, como a do quadrado da soma, trariam maiores dificuldades.

Outra contribuição importante para o estudo da aprendizagem em Álgebra e de suas dificuldades é oferecida por Pierce e Stacey (2004), que apresentam uma estrutura para caracterizar a introspecção algébrica (*algebraic insight*), conceituada como “a introspecção de que um estudante necessita para trabalhar com símbolos algébricos em uma atividade que envolve transformações” (p. 4). A introspecção algébrica tem dois aspectos, a expectativa algébrica e a habilidade para unir representações. A expectativa algébrica é definida pelas mesmas autoras como “o processo de pensamento que ocorre quando um matemático experiente considera a natureza do resultado que espera obter como consequência de algum processo algébrico” (p. 5). É desejá-

vel que os alunos atinjam um patamar em que possam trabalhar com símbolos e fazer tais estimativas em relação aos resultados dos exercícios com que lidam. Os professores, nesse caso, podem ser considerados “matemáticos experientes”, pois, ainda que sua prática não envolva, necessariamente, o trabalho em Matemática pura, mas em Educação Matemática, é grande sua experiência com a proposição e resolução de problemas semelhantes aos que propõem para seus alunos. Assim, discutir a introspecção e a expectativa algébrica de futuros professores pode ajudá-los a entender as necessidades de seus alunos.

Pierce e Stacey (2004) esclarecem que a expectativa algébrica envolve a observação de certos padrões de expressões e a habilidade para explorar os indícios que permitem prever a ocorrência desses padrões. Assim, conhecer o sentido dos símbolos empregados, a ordem das operações, os fatores comuns em mais de uma expressão, as representações gráficas de certas funções, são elementos que ajudam a desenvolver as habilidades que, tradicionalmente, são associadas ao estudo da Álgebra, em qualquer nível de ensino.

Apresentando, em rápidas pinceladas, alguns dos teóricos que têm fundamentado a Educação Algébrica, podemos, agora, relacionar essas idéias com as de outros estudiosos que buscam analisar erros em Matemática, em todos os graus de ensino. Borasi (1996), por exemplo, enfatiza o emprego dos erros como “ferramentas para a aprendizagem”, sugerindo que sejam utilizadas em três modalidades, não exclusivas: remediação, descoberta e exploração. No primeiro caso, a análise de erros ajuda a compreender as falsas interpretações que os estudantes podem ter feito sobre um determinado conteúdo apresentado e os professores têm, então, condições de rerepresentar o assunto, abordando as dificuldades detectadas.

Para fazer descobertas a partir dos erros, Borasi (1996) sugere o monitoramento das atividades dos alunos, de forma a entender como eles constroem o conhecimento. A exploração dos erros consiste em partir de um resultado intrigante e investigar a sua origem, o que pode levar a perspectivas inesperadas sobre a natureza de um determinado tópico matemático. Historicamente,

tanto em Ciências como em Matemática, há vários casos de resultados que, por não se encaixarem nos paradigmas vigentes, foram questionados pelos cientistas e conduziram a novas descobertas ou construções. A criação das Geometrias não-euclidianas é o mais conhecido exemplo na Matemática.

As propostas de Borasi (1996) podem ser, então, enfocadas para dar conta das idéias sobre aprendizagem em Álgebra anteriormente referidas. Vimos que os autores citam as habilidades de visualizar padrões, de reconhecer estruturas algébricas, de ser capaz de manipular símbolos, de estimar resultados de transformações algébricas. Nossas pesquisas (Cury, 2003, 2006) têm mostrado que os alunos calouros de disciplinas matemáticas de cursos da área de Ciências Exatas não têm, em geral, desenvolvidas essas habilidades e a análise qualitativa dos erros cometidos nos leva a pensar em possibilidades de monitorar suas atividades algébricas.

Para cursos de formação de professores, é fundamental que esse monitoramento seja feito, pois pode capacitar os futuros mestres a preverem as dificuldades dos seus alunos e prepararem suas aulas para fazê-las vir à tona. Não estamos, de forma alguma, propondo que o professor apresente questões as quais, sabidamente, seus alunos vão errar. Nossa sugestão é de antecipar a emergência dos erros com atividades que desenvolvam as habilidades antes citadas, de forma a compreender, *em ato*, como os estudantes se envolvem nas resoluções e como constroem seu conhecimento. Ainda que algumas atividades possam ser entendidas como avaliativas, é à avaliação formativa que estamos nos referindo, ou seja, àquela que é feita para inventariar, apoiar e orientar o aluno na busca de soluções para os problemas detectados, permitindo ao professor regular o ritmo das atividades ou o tipo de estratégias empregadas.

Outra abordagem para as investigações sobre erros são os estudos relacionados às atitudes dos professores quando avaliam as produções dos alunos. Essas pesquisas envolvem as concepções dos docentes sobre ensino, aprendizagem e avaliação. Tsamir et al. (2004) relatam uma investigação realizada em uma sala de aula de Ensino Médio, quando o professor estava ensinando desigualdades com expressões quadráticas. Após a gravação da

aula, o professor pôde assistir ao vídeo e identificar episódios em que ocorreram erros, em perguntas ou respostas dos alunos, tendo de sugerir maneiras de superá-los.

Em seguida, os pesquisadores apresentaram ao professor alguns erros que os estudantes usualmente cometem em relação ao conteúdo em questão e perguntaram como ele reagiria diante daqueles erros, em sala de aula. Suas respostas, transcritas e analisadas, mostram que o professor apresenta dois tipos de reação, que Tsamir et al (2004) chamaram de “econômica” e “elaborada”. Um caso típico de reação econômica consiste em ignorar o erro e continuar a aula. Como reação elaborada, os pesquisadores anotaram a solicitação, ao aluno, de repetição da solução errada e exposição para os colegas.

Na conclusão do relato os pesquisadores consideraram que as reações do professor dependem do tópico envolvido: ele dedicava mais tempo aos erros que surgiam em um conteúdo novo e menos tempo àqueles relacionados a tópicos já ensinados. É de questionar essa atitude, pois, ao permitir que se mantivessem as dificuldades dos alunos em assuntos já estudados, o professor está contribuindo para que os erros se “enquistem”, podendo se refletir nas dificuldades de aprendizagem em conteúdos subseqüentes.

A Formação de Professores e a Análise de Erros

As Licenciaturas em Matemática, pelas orientações oficiais, como as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática (Brasil, 2001), ou pelas considerações de pesquisadores que trabalham com a formação de professores, devem englobar, em suas grades curriculares, não só conhecimentos sobre conteúdos matemáticos, mas também os referentes às competências que o licenciando precisa desenvolver para sua futura atuação, em qualquer nível de ensino.

Rios (2002) considera que o termo “competências”, empregado no plural, “toma o lugar de ‘saberes’, ‘habilidades’, ‘capacidades’, que designam elementos que devem estar presentes na formação e na prática dos profissio-

nais da educação” (p. 159). A mesma autora afirma que a competência “se revela *na ação* [...], se refere sempre a um *fazer* que requer um conjunto de *saberes* e implica um posicionamento diante daquilo que se apresenta como desejável e necessário” (p. 167).

Para Fiorentini (1999), o saber docente é concebido como “reflexivo, plural e complexo, porque histórico, cultural, provisório, contextual e afetivo, formando uma teia, mais ou menos coerente e imbricada de saberes científicos [...]” (apud Jaramillo Quiceno, 2003, p. 35).

Já Santos (2005) alerta que há dois eixos na construção dos saberes docentes do professor de Matemática, um cognitivo e outro afetivo, e “ao eixo cognitivo, atribuímos a construção dos saberes da ciência, que chamaremos de disciplinares, e dos saberes da ação docente, que chamaremos da prática” (p. 260).

Assim, para fazer uso da análise de erros em um curso de formação de professores, é necessário entender que essa análise não é apenas uma técnica, apresentada como uma fórmula matemática para realizar um determinado procedimento. Os erros, bem como as fundamentações sobre suas possíveis causas, fazem parte do saber docente, porque é provisório (cada aluno terá um determinado comportamento diante de um problema, que poderá mudar a cada momento) e envolve um profundo conhecimento do conteúdo matemático relacionado ao erro e das ações que o docente vai desenvolver a partir do erro cometido pelo aluno.

Assim, trabalhar com análise de erros em um curso de formação de professores atende às orientações curriculares, pois pode “desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos” (Brasil, 2001, p. 4). Por outro lado, também atende às sugestões de educadores matemáticos envolvidos com formação de professores, pois qualifica o saber docente, tanto em conteúdos como em metodologias de ensino.

Reportando-nos, mais uma vez, à pesquisa sobre erros apresentada no início deste artigo, seus resultados foram utilizados em aulas de Metodologia do Ensino de Matemática, para estudantes de 6º semestre de um curso de Licenciatura em Matemática. Inicialmente, solicitamos aos licenciandos que resolvessem o teste original, aplicado, então, em forma de questões abertas, de maneira que pudéssemos verificar como os futuros professores enfocavam cada problema. A seguir, em duplas, eles analisaram as produções de seus colegas de turma, discutindo, ao final, as estratégias adotadas para as resoluções e os erros detectados.

Em um novo encontro os mesmos alunos, trabalhando em duplas, receberam as resoluções dos calouros para determinadas questões e procuraram fazer a análise dos erros, unitarizando, categorizando e produzindo um texto-síntese sobre eles. A comparação das estratégias por eles desenvolvidas na aula anterior, com as empregadas pelos calouros para as mesmas questões, mostraram o potencial dos erros para compreender as dificuldades de aprendizagem. Aprendendo a analisar erros de forma sistemática, quantitativa e qualitativamente, os alunos desenvolveram uma atitude de pesquisa em relação ao tema, não mais encarado apenas como um elemento da avaliação da aprendizagem ou uma possibilidade de atribuir nota aos estudantes.

Ainda no mesmo curso, a partir das dificuldades detectadas, tanto nas produções dos licenciandos quanto nas dos calouros participantes da pesquisa original, elaboramos atividades para explorar o potencial dos erros e desenvolver habilidades em Álgebra, visto que esta é uma das áreas básicas, juntamente com a Análise e a Geometria, na formação matemática de um professor.

Sugestões de Atividades, a partir de Erros em Álgebra, para um Curso de Formação de Professores

Entre as possíveis atividades a serem desenvolvidas em cursos de Licenciatura em Matemática, a partir de erros cometidos por estudantes em conteúdos de Álgebra, estão aquelas que buscam desenvolver as habilidades con-

sideradas necessárias para a aprendizagem de conteúdos dessa área e as que envolvem o planejamento de recursos para as aulas de Álgebra dos futuros professores.

Encontramos padrões em números, em formas, em situações matemáticas e não-matemáticas e, ao visualizá-los, conseguimos generalizar uma situação e encontrar uma expressão ou equação que a modele. Partindo dessa idéia, propusemos, aos alunos do curso de Matemática, as seguintes atividades:

1) *Abaixo, são apresentadas quatro seqüências de números. Em cada uma, os dois números centrais foram substituídos por zero e não sabemos quais são. Só sabemos que, em cada uma, para chegar no último número devemos efetuar alguma operação que também não sabemos qual é.*

- a) Encontre os números que faltam em cada seqüência;
- b) encontre uma fórmula que permita continuar a seqüência;
- c) invente outras seqüências em que faltem alguns números e proponha aos seus colegas, para que eles tentem completá-las.

0	0	0	24
– 4	0	0	32
1,5	0	0	– 0,75
128	0	0	2

(Adaptado de <http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/regularidades/regularidades_1.htm>)

2) *Pense em um número inteiro; se for par, divida por 2, se for ímpar, multiplique por 3 e some 1. Repita o processo sucessivamente e pare quando atingir 1. Será verdade que, para qualquer número de partida, atinge-se sempre 1?*

- a) Faça um teste, começando por: a) 32 b) 160 c) 7
- b) Defina recursivamente a seqüência de números obtidos (seqüência de Collatz).

Ainda que sejam relativamente simples, essas atividades permitem a análise de sua produção (ou seja, dos rascunhos que vai fazendo para encontrar a resposta) e mostram se há dificuldade de introspecção ou expectativa algébrica, se o estudante visualiza as transformações, se estabelece o padrão.

Como motivação, podemos, também, sugerir aos estudantes que procurem fazer as atividades propostas no site da série Numb3rs, apresentada em canais de TV a cabo, no Brasil. Tais atividades são elaboradas pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) americano, em conjunto com a Texas Instruments (NUMB3RS, 2006). Pelas características do programa, a busca de regularidades é fundamental para a solução dos crimes investigados pelo detetive e pelo seu irmão matemático. Na introdução de cada programa, ouve-se alguém repetir:

Todos nós usamos Matemática diariamente ... para prever o tempo ... para visualizar padrões ... para prever comportamentos ... para analisar crimes ... Matemática é mais do que fórmulas e equações ... É lógica ... É racionalidade ... É o uso da mente para resolver os maiores mistérios que conhecemos (NUMB3RS, 2006).

Finalmente, outra atividade que empregamos freqüentemente em aulas de Metodologia do Ensino de Matemática é a construção de jogos que possam ser usados em aulas de Matemática da Educação Básica para auxiliar os alunos a desenvolverem habilidades em cálculos algébricos. Um dos jogos construídos recebe o nome de “Quebra-cabeça triangular das frações algébricas” e nele são apresentados exercícios semelhantes ao da Questão A da pesquisa citada na parte inicial deste artigo.

O jogo, que favorece a compreensão das operações com frações algébricas, é baseado em um material existente no Museu de Ciência e Tecnologia da PUCRS (MCT-PUCRS), construído para o trabalho com operações numéricas (Cury, 1995). As peças são confeccionadas em cartolina, papel-cartaz ou EVA. O jogo é construído sobre uma moldura representada por um triângulo equilátero com 24 cm de lado. Recortamos 16 triângulos equiláteros, de 6 cm

de lado, e cada um destes, no encaixe, fica com seus lados adjacentes aos lados de outros triângulos congruentes ou à moldura. Escrevemos uma fração algébrica sobre um dos lados de um triângulo e, no lado do triângulo adjacente, colocamos a resposta, como na Figura 1, a seguir:

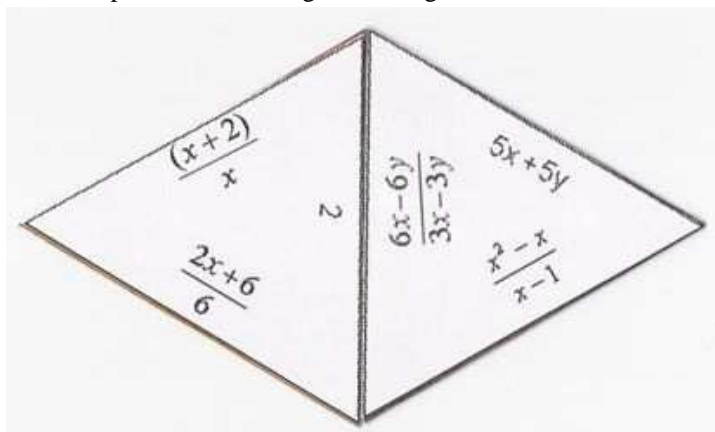


Figura 1: Peças encaixadas do quebra-cabeça triangular

Fonte: Material elaborado pela autora

Para o trabalho em sala de aula o professor organiza duplas de estudantes, entregando para cada dupla uma moldura e um conjunto de 16 peças, nas quais encontrarão as questões propostas e as respostas. Os alunos terão, então, que encaixar as peças de modo que cada questão apresentada em um dos lados de um triângulo tenha, no lado adjacente pertencente ao outro triângulo, a resposta correta. O jogo termina quando não há mais peças sobre a mesa.

O interesse pelo uso deste jogo, para o professor, é a possibilidade de analisar as discussões mantidas entre as duplas de estudantes, ao tentarem resolver os exercícios propostos. Os erros porventura existentes, de falta de introspecção e expectativa algébrica, de desconhecimento da ordem das operações, ou outros, são detectados no momento em que ocorrem e permitem que o professor retome o assunto, empregando até mesmo o vocabulário com que o aluno se refere às suas dúvidas, o que não é possível em ocasiões de provas ou durante as explicações em sala de aula.

Considerações Finais

Neste artigo vimos que é possível investigar erros cometidos pelos próprios estudantes de Licenciatura em Matemática ou levá-los a trabalhar com dados colhidos em pesquisas já realizadas. Vimos, também, que a Educação Algébrica tem especificidades que nos incentivam a elaborar atividades para desenvolver, nos estudantes de qualquer nível, as habilidades inerentes a essa área da Matemática.

A partir de algumas análises já concluídas, em projetos por nós coordenados, trouxemos exemplos de erros que evidenciam a falta do “sentido da estrutura” e que apontam para dificuldades que se mantêm desde o Ensino Fundamental, haja vista a percentagem de erros nas questões apresentadas inicialmente.

Também indicamos atividades propostas para alunos de cursos de Licenciatura, com as quais é possível trabalhar as habilidades de reconhecer padrões ou de descobrir regularidades. Detalhamos igualmente o uso de um jogo sobre frações algébricas, em que repetimos, nas questões, aquelas expressões que causaram alguma dificuldade para os alunos calouros participantes da pesquisa original, mas também para os licenciandos que fizeram o mesmo teste.

Com essas idéias, esses exemplos, essas fundamentações, procuramos mostrar a análise de erros como uma sugestão de trabalho em cursos de formação de professores de Matemática. Novas experiências, tanto em análise de erros quanto em elaboração de atividades para o ensino de Matemática em cursos de formação de professores, já foram desencadeadas pela equipe que participou do projeto “Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores” e têm sido apresentadas em comunicações em eventos. Dessa forma, esperamos que o conhecimento sobre o tema seja compartilhado com a comunidade de Educação Matemática e que este artigo desperte o interesse de outros colegas pelo assunto, sendo a semente de novos projetos, no Rio Grande do Sul ou no país.

Referências

- BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1979.
- BORASI, R. *Reconceiving mathematics Instruction: a focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1302/2001. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>>. Acesso em: 12 maio 2007.
- CURY, H. N. Quebra-cabeça triangular: jogo que trabalha com várias possibilidades. *Revista do Professor*, Porto Alegre, v. 11, n. 41, p. 21-22, jan./mar. 1995.
- _____. Análise de erros e análise de conteúdo: subsídios para uma proposta metodológica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos. *Anais...* Santos: SBEM, 2003. CD-ROM.
- _____. A análise de erros na construção do saber matemático. In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1. e JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2006, Passo Fundo. *Anais...* Passo Fundo: UPF, 2006. 1 CD-ROM.
- CURY, H. N.; KONZEN, B. Análise de resoluções de questões em Matemática: as etapas do processo. *Educação Matemática em Revista-RS*, v. 7, n. 7, p. 33-41, 2005, 2006.
- HOCH, M.; DREYFUS, T. Structure sense in high school algebra: the effect of brackets. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. *Proceedings...* Bergen: PME, 2004. CD-ROM.
- JARAMILLO QUICENO, D. V. *(Re)constituição do ideário de futuros professores de Matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas; Faculdade de Educação, 2003. (Tese de Doutorado em Educação).
- KIRSHNER, D.; AWTRY, T. Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 35, n. 4, p. 224-257, 2004.
- LINCHEVSKI, L.; LIVNEH, D. Structure sense; the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, n. 40, p. 173-196, 1999.
- NUMB3RS. Disponível em: <http://www.cbs.com/primetime/numb3rs/>. Acesso em: 25 ago. 2006.
- PATTON, Michael Q. *Qualitative Evaluation Methods*. London: Sage, 1986.

PIERCE, R.; STACEY, K. Monitoring progress in algebra in a CAS active context: symbol sense, algebraic insight and algebraic expectation. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, v. 11, n. 1, p. 3-11, 2004.

RIOS, T. A. Competência ou competências – o novo e o original na formação de professores. In: ROSA, G. E.; SOUZA, V. C. *Didáticas e práticas de ensino: interfaces com diferentes saberes e lugares formativos*. Rio de Janeiro: DP&A, 2002. p. 154-172.

SANTOS, Mônica B dos. *Saberes de uma prática inovadora: investigação com egressos de um curso de Licenciatura Plena em Matemática*. Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2005. (Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática).

THE COLLATZ sequence. Disponível em: <<http://acm.uva.es/problemset/v6/694.html>>. Acesso em agosto 2006.

TSAMIR, P.; TIROSH, D.; TIANO, S. “New errors” and “old errors”: the case of quadratic inequalities. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. *Proceedings...* Bergen: PME, 2004. CD-ROM.

Recebido em: 23/5/2007

Aceito em: 18/6/2007